Задачи на построение с использованием сетки в процессе подготовки будущих учителей начальных классов

О.В. Шереметьева

Геометрическая подготовка будущих учителей начальных классов существенно отличается от подготовки студентов математических и гуманитарных специальностей. В отличие от «математиков» студенты факультетов начального образования имеют дело со значительно меньшим объемом геометрической информации и меньшей строгостью ее изложения. В то же время, в отличие от «гуманитариев», будущим учителям начальных классов недостаточно иметь представление о различных геометрических объектах и методах. Им профессионально необходимо такое владение геометрией, которое позволит организовать изучение геометрического материала младшими школьниками, т.е. создать условия для формирования пространственного мышления детей и умения видеть окружающий мир с геометрических позиций.

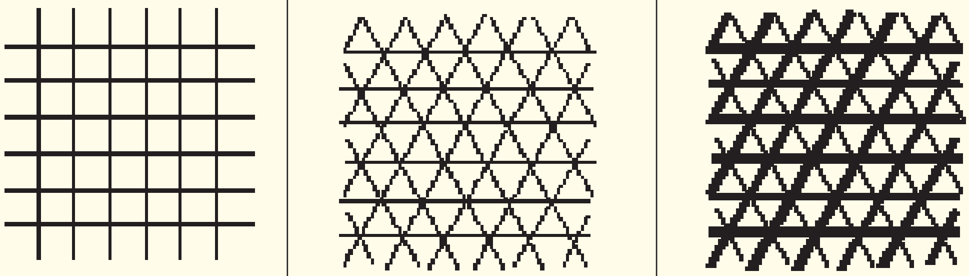
Для того чтобы организовать учебно-познавательную деятельность детей с учетом их субъектного опыта, возможностей и потребностей, пойти с учеником в изучении геометрического материала так далеко, как он сможет и захочет, учителю самому необходимо владеть определенными видами деятельности с геометрическими объектами, уметь устанавливать содержательные связи внутри геометрии и связи геометрии с реальным миром.

Однако студенты факультетов начального образования, изучившие школьный курс элементарной геометрии, во многих случаях оказываются не в состоянии увидеть в окружающих предметах модели геометрических объектов, не владеют практическими видами деятельности, доступными младшим школьникам. Неумение установить связи между наглядной геометрией, которой будущим учителям предстоит заниматься с детьми, и дедуктивной, доказательной геометрией в дальнейшем приводит к тому, что учителя, предлагая школьникам геометрические задания из учебников, не могут организовать работу над этими заданиями так, чтобы она приводила детей к открытию нового, давала возможность замечать закономерности, способствовала развитию интереса детей к дальнейшему изучению геометрии.

Поэтому процесс обучения студентов должен быть ориентирован на освоение тех видов практической деятельности на геометрическом материале, которые в дальнейшем могут быть использованы в работе с детьми. К ним относят получение моделей плоских фигур, обладающих определенными свойствами, при помощи перегибания бумаги, построения и измерения при помощи различных инструментов (в том числе на местности), получение моделей многогранников из разверток, изготовление моделей тел вращения из бумажной ленты и т.д.

Остановимся подробнее на одном из видов подобной деятельности – на геометрических построениях с использованием сетки (решетки) и линейки без делений. Такие построения могут изучаться со студентами на доказательном уровне. Решение задач на построение целесообразно сопровождать формулированием соответствующих заданий для детей и рассмотрением способов работы с ними.

Сетка на плоскости образуется из двух или нескольких семейств параллельных прямых, разрезающих плоскость на равные многоугольники, которые называют основными многоугольниками разбиения. Множество вершин этих многоугольников называют точечной решеткой, а сами вершины – узлами решетки. Среди различ-



а *б* *в*

Рис. 1

ных сеток можно выделить такие, в которых основные многоугольники являются равносторонними. Самой распространенной среди них является квадратная сетка, моделью которой служит клетчатая бумага (рис. 1*а*). Кроме этого могут быть выделены сетки, основными многоугольниками которых являются равносторонний треугольник (рис. 1*б*) и ромб (рис. 1*в*). Вторая из них может быть получена из первой, и обе они порождают одну и ту же решетку. Поэтому будем вести речь о двух видах сетки – квадратной и треугольной. Имеет смысл рассматривать такие задачи, в которых идет речь о фигурах, все вершины или как можно большее количество их расположены в узлах сетки.

Задача 1. Через данный узел сетки C с помощью одной линейки проведите прямую, параллельную данной прямой, проходящей через два данных узла сетки A и B (рис. 2*а*, 3*а*).

На рис. 2*б* и 3*б* показано решение этой задачи при помощи квадратной и треугольной сеток. Для обоснования параллельности построенной прямой CD данной прямой AB на рис. 2*б* можно воспользоваться признаком параллелограмма (в четырехугольнике ACDB противоположные стороны AC и BD параллельны и равны), признаком равенства треугольников (равенство треугольников ACM и BDN по двум катетам следует из способа построения), теоремой, обратной признаку параллельности прямых (из параллельности прямых AM и BN следует равенство углов MAB и NBL) и самим признаком параллельности прямых (из равенства углов CAB и DBL следует параллельность прямых AC и BD). Другой способ обоснования может быть связан с рассмотрением параллельного переноса на вектор AB. Обоснования решения на рис. 3*б* аналогичны, здесь представлен частный случай расположения точек в узлах

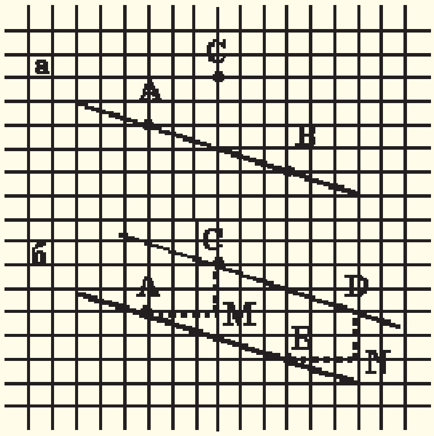


Рис. 2

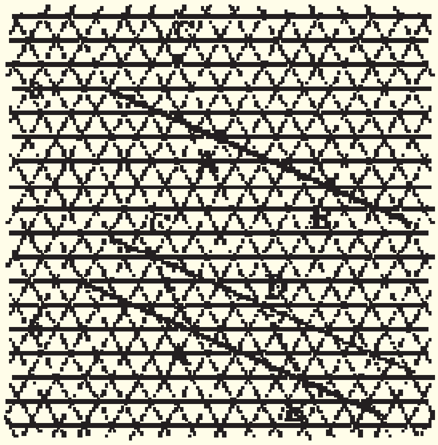
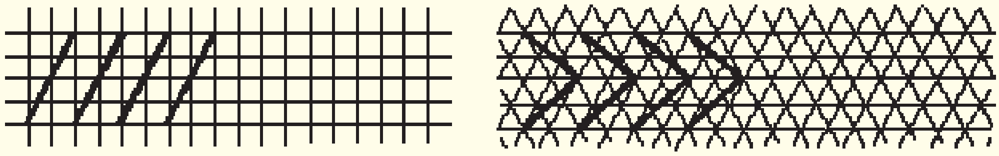


Рис. 3



а *б*

Рис. 4

решетки, когда точки A и C лежат на одной прямой сетки.

Мы видим, что в данном случае способ построения прямой, параллельной данной, и обоснование найденного способа отличаются от решения известной из курса средней школы задачи на построение при помощи циркуля и линейки. Поиск такого способа построения создает условия для установления новых содержательных связей, позволяет посмотреть на имеющиеся знания и представления с точки зрения возможностей предложенного инструмента – сетки.

С другой стороны, процесс решения этой задачи может быть целенаправленно ориентирован на будущую профессиональную деятельность студентов. В связи с этим решение задачи следует связать с обсуждением вопроса о возможностях постановки соответствующего учебного задания для младших школьников. Понятно, что для работы с детьми эта задача должна быть переформулирована. Поэтому следует выяснить, можно ли ее переформулировать с сохранением математического содержания и в каком виде эта задача может быть предложена детям. Ученики начальной школы не знакомы с понятием параллельности, поэтому указание на нее может быть дано в задании лишь косвенно. Например, это могут быть упражнения на продолжение орнамента (рис. 4).

Обсуждение со студентами возможностей использования такого упражнения с использованием квадратной сетки, т.е. клетчатой бумаги (рис. 4*а*), в процессе обучения младших школьников и определение способов работы с ним связано с составлением вопросов и заданий для детей, позволяющих обратить внимание на некоторые свойства изображенных отрезков, связанные с их параллельностью. В частности, полезно спросить детей о том, как они строили отрезки, из каких точек и в каком направлении они «шагали»; верно ли, что если из точки, являющейся концом (серединой) какого-нибудь отрезка, сделать два шага

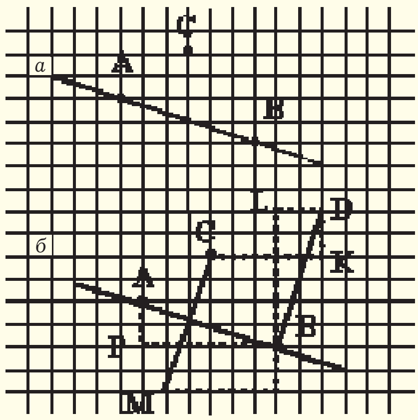


Рис. 5

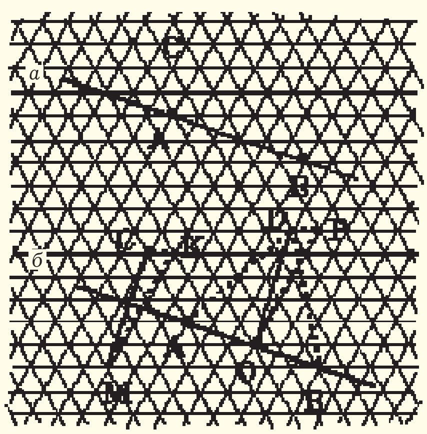


Рис. 6

вправо или влево, то мы попадем в точку, являющуюся концом (серединой) соседнего отрезка и т.д.

Более сложным для детей будет такое задание: «Из точки, являющейся серединой последнего нарисованного вами отрезка, сделайте два шага вправо. Продолжите рисовать орнамент из отрезков, считая эту точку верхним концом отрезка». Обсуждая с детьми выполнение этого задания, целесообразно решить вопрос о том, как, «шагая» по сторонам клеток, из точки, являющейся верхним концом старого отрезка, попасть в точку, являющуюся верхним концом нового отрезка, т.е. определить «маршрут» (например, один шаг вправо и два шага вниз).

Использование треугольной сетки при работе с младшими школьниками связано с повышением сложности заданий. Это объясняется как отсутствием у детей опыта работы с такой сеткой (в то время как с клетчатой бумагой они знакомы практически с первых дней обучения в школе), так и с наличием трех семейств параллельных прямых, определяющих три направления движения при выборе «маршрута». Кроме того, в упражнении, представленном на рис. 4*б*, повышение сложности связано со структурным усложнением элемента орнамента.

Таким образом, описанный способ работы над задачей 1 направлен на освоение студентами построений с использованием сетки как на доказательном, так и на наглядном, доступном для детей уровне.

Задача 2. Через данный узел сетки C с помощью одной линейки проведите прямую, перпендикулярную данной прямой, проходящей через два данных узла сетки A и B (рис. 5*а*, 6*а*).

На рис. 5*б* и 6*б* показано решение этой задачи при помощи квадратной и треугольной сеток. Для обоснования решения задачи с помощью квадратной сетки (рис. 5*б*) могут быть использованы теорема, обратная признаку параллельности прямых (прямая DB перпендикулярна прямой AB, поэтому и параллельная ей прямая CM перпендикулярна прямой AB), признак равенства треугольников (равенство треугольников APB и DLB по двум катетам следует из способа построения). Другой способ обоснования может быть связан с рассмотрением поворота вокруг точки B. Для обоснования решения задачи с помощью треугольной сетки (рис. 6*б*) также могут быть использованы теорема, обратная признаку параллельности прямых, признак равенства треугольников и, кроме того, теорема о равнобедренном треугольнике (треугольник ADB является равносторонним по способу его построения).

Обсуждение со студентами вопроса о возможностях использования соответствующего учебного задания для младших школьников может привести к формулированию упражнений, позволяющих детям заметить некоторые закономерности в расположении прямых углов на клетчатой бумаге, к поиску способов построения прямого угла на клетчатой бумаге.

Например, в работе с детьми могут быть использованы такие упражнения, в которых требуется скопировать по клеткам квадрат (рис. 7*а*), дорисовать квадрат (рис. 8*а*).

При выполнении упражнения на копирование квадрата полезно пред-

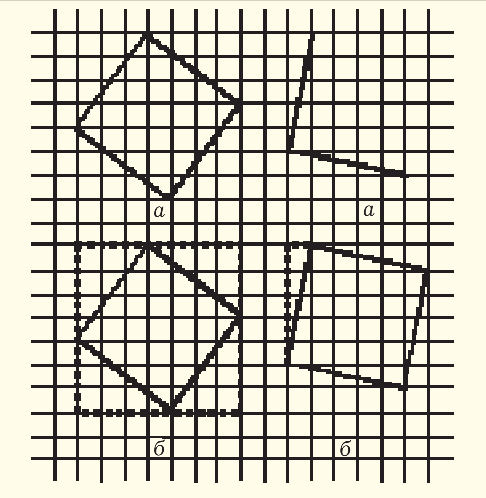


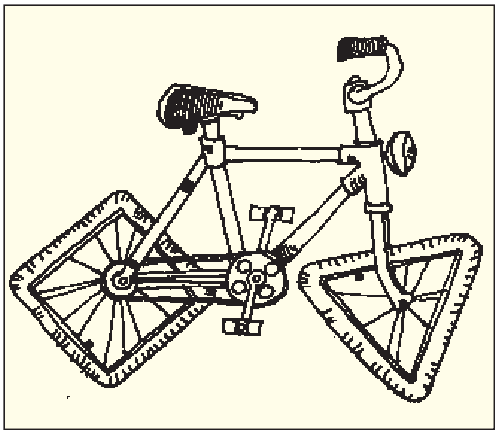
Рис. 7 *Рис. 8*

ложить детям проверить с помощью линейки и угольника, что данная фигура действительно является квадратом, а затем составить «маршрут» последовательного перемещения по сторонам клеток от одной вершины квадрата к другой. Этот «маршрут» можно изобразить на рисунке (например, рис. 7б) и записать с помощью слов («3 клетки вправо, 4 клетки вниз, 3 клетки вниз, 4 клетки вправо» и т.д.) или символов (например, так: $\bullet 3 \longrightarrow 4\downarrow \bullet 3\downarrow 4 \longrightarrow \bullet 3 \longrightarrow 4\uparrow \bullet 3\uparrow 4 \longleftarrow$). Найденный «маршрут» поможет скопировать данный квадрат. Важно обратить внимание детей на повторяющиеся числа в записи «маршрута» и предложить им дорисовать квадрат (рис. 8*а*) с составлением соответствующего «маршрута».

Использование рис. 7*б* дает возможность рассмотреть со студентами задачу об отношении площадей изображенных квадратов, что в свою очередь позволяет обсудить способы формулирования соответствующего задания для младших школьников.

Процедура построения прямого угла при помощи треугольной сетки достаточно сложна, поэтому нецелесообразно вести речь о построении при ее помощи фигур, содержащих прямые углы. Треугольная сетка может быть использована для построения фигур, содержащих углы, градусная мера которых кратна 60, и, в частности, правильных треугольников.

В связи с этим студентам может быть предложена задача: «Доказать, что если две вершины правильного треугольника находятся в узлах треугольной сетки, то и третья вершина треугольника находится в узле этой сетки». Поэтому рассмотренная выше задача 2 может привести к формулированию для младших школьников учебных заданий, связанных с копированием треугольников и определением «маршрутов» последовательного перемещения по сторонам треугольной сетки от одной вершины треугольника к другой.



Кроме задач на построение прямой, параллельной и перпендикулярной данной прямой, при помощи сетки могут быть решены и другие задачи, соответствующие основным задачам на построение при помощи циркуля и линейки. В частности, это могут быть задачи на деление отрезка в заданном отношении, задачи на построение треугольников по их элементам, задачи на построение фигур, симметричных относительно заданной точки или прямой, и др.

Геометрические построения при помощи сетки были использованы в ходе экспериментального обучения будущих учителей начальных классов. Обучение, основанное на решении задач на доказательном и практическом уровнях деятельности и протекающее во взаимосвязи содержательного и методического аспектов геометрической подготовки студентов, дало возможность установить новые содержательные связи внутри геометрии, привело к усилению профессиональной направленности знаний и повышению мотивации будущих учителей начальных классов к изучению геометрии.

Ольга Владиславовна Шереметьева – *канд. пед. наук, доцент кафедры математики и методики ее преподавания в начальных классах Пензенского государственного педагогического университета.*