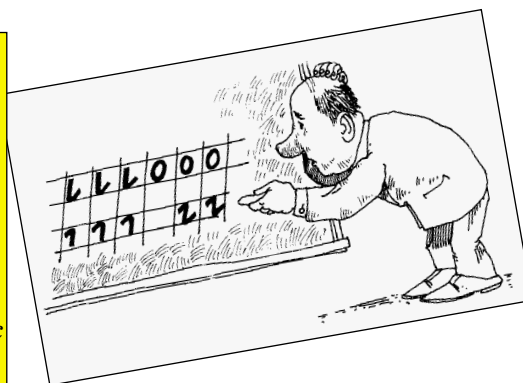


**Элементы стохастики
в курсах математики факультетов
подготовки учителей
начальной школы**

А.П. Тонких



Наша жизнь состоит из явлений стохастического характера*. Поэтому современному человеку необходимо иметь представление об основных методах анализа данных и вероятностных закономерностях, играющих важную роль в науке, технике, экономике. В этой связи элементы комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики должны войти в школьный курс математики начальных классов в виде одной из сквозных содержательно-методических линий, которая даст возможность учащимся накопить определенный запас представлений о статистическом характере окружающих явлений и их свойствах.

Современное школьное образование приучает учащихся подходить к оценке явлений реальной действительности лишь с позиций классического детерминизма, когда, согласно законам дедуктивного метода, всё имеет причинно-следственный характер, строго определено и трактуется однозначно.

Однако есть целый класс задач, имеющих большое значение как в науке, так и в ее приложениях, в которых **результат действия однозначно не определен. Это стохастические задачи.** Решение таких задач требует хорошей математической подготовки, определенного стиля мышления.

Формирование статистической культуры, развитие вероятностной интуиции, следуя выводам современных исследований, гораздо эффективнее начинать в раннем детстве, потому что у

человека с возрастом формируется консервативное мышление, а значит, многие понятия теории вероятностей и математической статистики воспринимаются им иначе (некоторые из них порой вступают в противоречие с жизненным опытом). Практика показывает, что ученикам старших классов, которые раньше встречались только с детерминированными моделями реального мира, очень трудно воспринимать стохастические идеи. Начальный курс математики вполне может стать той первой ступенью, с которой должна начаться пропедевтическая подготовка изучения этого раздела математики.

В настоящее время в курсе математики начальных классов элементы теории вероятностей и математической статистики практически не представлены. Они не отражены в Государственном образовательном стандарте, в действующих Программах для начальной школы, в учебниках и других методических и дидактических материалах для учителя. Вместе с тем в ряде развитых странах мира, таких, как Великобритания, Германия, США, Франция, Япония и др., с элементами стохастики учащиеся знакомятся в младших классах и на протяжении всего периода обучения в школе усваивают вероятностно-статистические подходы к анализу распространенных ситуаций, встречающихся в повседневной жизни. В начальных классах школьники обучаются в основном сбору, представлению (в виде таблиц, диаграмм, графиков)

* Стохастический (от греч. *stochastikos* – умеющий угадывать) – случайный, вероятностный.

и анализу данных, накопленных в результате наблюдений за окружающей действительностью или по итогам организованных учителем практических работ. В средних и старших классах учащиеся получают представления о простейших свойствах стохастических явлений и обработке статистических данных, о статистических закономерностях в реальном мире и математических методах их изучения.

За последнее десятилетие в России сделаны реальные шаги к введению в школьный курс математики стохастической содержательно-методической линии. Разработаны проекты концепции школьного математического образования, экспериментальные учебные программы, базисные и школьные учебные планы, новые учебники математики для средней школы, в которых представлен стохастический материал, появился ряд научно-методических работ, посвященных этой проблеме. В одобренной в 2000 г. Всероссийским совещанием работников образования «Концепции структуры и содержания общего среднего образования» провозглашено, что «обновление содержания математики связано прежде всего с введением в школьный курс вероятностно-статистического материала, необходимого для жизни в современном обществе».

Введение стохастической линии в школьном математическом образовании инициирует изменения и в содержании курса математики на факультетах подготовки учителей начальных классов. Теперь вузовский раздел стохастики следует рассматривать не только с точки зрения широкого применения изучаемого материала в разных областях науки, в практической деятельности человека, но и как предмет, способствующий развитию математической и общекультурной составляющей будущего учителя. К этому разделу добавляются чисто профессиональные требования – **овладение предметом, преподавание основных понятий которого учитель будет проводить в начальной школе.**

Вероятностные модели обладают рядом ценных качеств, которые весьма полезны в образовательном процессе и в школе, и в вузе. Во-первых, на этих моделях четко прослеживаются все этапы использования математики в решении практических задач (формализация, исследование, интерпретация). Во-вторых, все элементарные вероятностные модели взяты из реальной действительности. В-третьих, значительное большинство задач по теории вероятностей отличается содержательностью и неформализованностью. В-четвертых, наш мир построен на вероятности, нам часто приходится сталкиваться с ситуациями, разрешить которые обычными жестко детерминированными способами порой бывает невозможно.

Пример 1. Для того чтобы оценить число рыб в пруду, поступают следующим образом. Сетью ловят, скажем, 200 рыб, ставят на них метки и отпускают обратно в пруд. Через некоторое время снова ловят 200 рыб. Пусть среди них всего 4 рыбы окажутся помеченными. 200 рыб составляют случайную выборку. Раз на каждые 200 рыб приходится четыре помеченных, то 200 помеченных рыб приходится примерно на 10 000, т.е. в пруду приблизительно 10 000 рыб.

Несмотря на простоту и доступность примера, в его основе лежит совершенно нетривиальная **идея случайного**. Данная задача вполне по силам учащимся начальных классов, так как она относится к задачам с пропорциональными величинами.

Используя данные, полученные на практике, можно при помощи теории вероятностей получить такие теоретические распределения частот или вероятностей, которые служат для описания реально встречающихся в педагогической деятельности распределений. Некоторые такие задачи рассмотрены в работах [1, 2]. Рассмотрим еще два примера.

Пример 2. Сколько опытов надо поставить, чтобы выводы из них были достоверны? Если опытов слишком мало, то, естественно, возникает сомнение,

что результаты опытов случайны. Конечно, чем больше опытов, тем надежнее сделанные из них выводы. Но сколько надо сделать опытов для получения надежных выводов? Ведь каждый опыт – это затраченное время, а порой и деньги. Методы теории вероятностей позволяют обосновать необходимое количество опытов для получения достаточно надежных результатов.

Пример 3. Для того чтобы распределить места между классами по результатам контрольной работы, в каждом классе выводится средняя оценка (среднее арифметическое из всех оценок, полученных за контрольную работу). Возникает вопрос, сколько знаков после запятой корректно учитывать при таком сравнении? И здесь аппарат теории вероятностей позволяет получить ответ. Для классов численностью 30–40 человек корректно вычислять ответы с точностью до 0,1. А вот для того, чтобы учитывать и сотые, необходимо, чтобы число контрольных работ было примерно 2 500.

Качество работы учителя во многом определяется корректностью использования методов научно-педагогических исследований, которые, так или иначе, ему приходится применять в своей профессиональной деятельности. К таким методам относят: наблюдение (цель которого – сбор фактического материала), опрос, анкетирование, тестирование и др. Последние из названных методов часто применяют в тех случаях, когда необходимо получить информацию о таких явлениях и процессах, которые недоступны прямому наблюдению. Примером может служить изучение причин неуспеваемости по математике или затруднений, которые испытывают учащиеся при решении задач определенного типа.

Использование различных методов исследования дает содержательный фактический материал, который следует систематизировать и обработать, используя статистические методы обработки результатов наблюдений.

На первом этапе применяются

методы описательной статистики, позволяющие провести классификацию первичных данных, представить их в наиболее наглядной форме (гистограммы, полигоны частот и т.п.) и получить некоторые обобщающие показатели (среднее арифметическое, медиану, моду, дисперсию), которые дают возможность сравнивать между собой различные данные и делать определенные выводы.

На втором этапе используются **методы корреляционного анализа и регрессионного анализа**, которые позволяют установить наличие и степень связи между проведенным тестированием (опросом, контрольной работой) и условиями, в которых они проводились, возрастом опрошенных и т.п.

Последующее осмысление и сопоставление систематизированного и обработанного материала позволяет учителю сделать обобщения и соответствующие выводы.

Знание будущим учителем вероятно-статистических методов и умение применять их в своей исследовательской работе – это необходимое, но не достаточное условие его готовности к преподаванию элементов стохастики в начальной школе. Своего решения ждут **вопросы методической готовности учителя** к реализации стохастической линии начального курса математики.

В начальной школе стохастика может быть представлена в виде элементов комбинаторики, теории графов, наглядной и описательной статистики. С их изучением тесно связано формирование у младших школьников отдельных комбинаторных способностей, вероятностных понятий («чаще», «реже», «невозможно», «возможно» и др.), статистической культуры. Такое содержание учебного материала способствует развитию внутрипредметных и межпредметных связей (в частности, математики и естествознания), позволяет осуществлять прикладную направленность курса, раскрывает роль современной математики в познании окружающей действительности, формирует мировоззрение.

Реализация стохастической содержательно-методической линии в младших классах даст возможность школьникам:

- а) научиться осуществлять несложный перебор всех возможных вариантов при решении простейших комбинаторных задач;
- б) научиться пользоваться таблицами и графами;
- в) получить представления о сборе и накоплении данных;
- г) приобрести первоначальный опыт проведения простых статистических экспериментов;
- д) научиться «читать» информацию, заданную с помощью простых диаграмм, таблиц, графов.

В процессе изучения стохастики у школьников получают дальнейшее развитие такие общеучебные и практические умения, как умения наблюдать, сравнивать, классифицировать, измерять, анализировать жизненные ситуации, принимать обоснованные решения и др.

Средствами формирования первоначальных статистических представлений могут быть: стохастические игры, моделирование, опыты со случайными исходами, простейшие статистические исследования.

В заключение предлагаем небольшую подборку задач, работа над которыми позволит уже сейчас проводить пропедевтику основных понятий комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики в начальной школе – как на уроках, так и на внеклассных занятиях по математике. Среди них: простейшие комбинаторные и вероятностные задачи, стохастические игры, экспериментальные задания и др. Данный набор задач может послужить учителю основой для дальнейшей творческой работы, так как многие задания допускают изменение числовых данных или содержат идеи, которые можно использовать при составлении новых задач.

1. Однажды встретились пятеро друзей. Каждый, здороваясь, по-

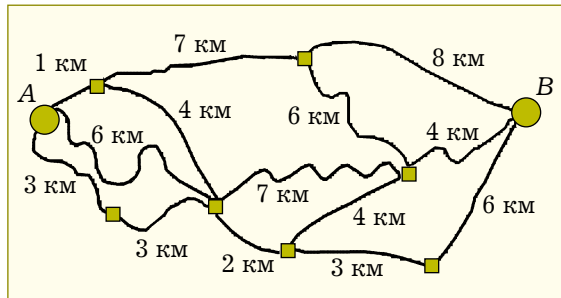
жал руки всем остальным. Нарисуй граф и узнай, сколько всего сделано рукопожатий?

2. У мамы есть яблоки, груши, крыжовник и смородина. Сколько различных компотов может приготовить мама, если для одного компота будет брать три разных компонента?

3. Сколько различных нечетных двузначных чисел можно написать с помощью цифр 2, 3, 7, если: а) цифры в числе могут повторяться; б) цифры в числе не повторяются? Запиши все эти числа.

4. Нарисуй граф и с его помощью узнай, сколько всего бабушек и дедушек было у всех твоих бабушек и дедушек?

5. Туристам необходимо добраться из пункта А в пункт В (см. рисунок). Помоги им выбрать самый короткий путь.



6. В ящике 100 черных, 100 белых и 100 красных шаров. Какое наименьшее число шаров надо вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них наверняка было: а) 2 шара одного цвета; б) 3 шара одного цвета; в) 2 белых шара?

7. Монету подбрасывают 3 раза. Сколько раз может выпасть орел?

8. Игральный кубик подбрасывают 4 раза. Сколько раз может выпасть четное число очков?

9. Подбросили два игральных кубика. Какое событие обязательно произойдет, какое событие не произойдет никогда, а какое событие может произойти или не произойти: а) сумма выпавших очков больше 10; б) сумма выпавших очков больше 13; в) сумма выпавших очков меньше 13?

10. Ниф-Ниф, Наф-Наф и Нуф-Нуф получили три участка для того,

чтобы каждый из них построил на своем участке домик. Сколькими различными способами они могут распределить между собой участки? Нарисуй всевозможные варианты распределения участков.

11. Проведи опрос среди своих одноклассников, где они были в воскресенье, и заполни таблицу, аналогичную той, что показана ниже. Сделай вывод о том, какое место отдыха было наиболее популярным.

Место отдыха	В парке	В театре	Дома	На даче	В лесу	В гостях
Число учащихся						

12. Петя и Катя решили сыграть партию в шашки. Путем подбрасывания монеты они решили определить, кто будет ходить первым. Однако монеты поблизости не оказалось. Каким другим способом они могут это сделать?

13. В коробке лежат 25 одинаковых картонных кружков. На каждом кружке нарисовано животное или растение (15 растений и 10 животных). Малыш и Карлсон играют в такую игру: наугад вынимают один кружок, фиксируют, что на нем изображено, а затем возвращают его в коробку. Опыт повторяют 20–30 раз. Если будет вынуто больше изображений растений, то выигрывает Карлсон, если животных, то – Малыш. Сыграй с товарищем в эту игру. Заполни таблицу. Является ли игра справедливой?

Вид изображения	Животное	Растение
Количество кружков		

14. Лиса Алиса и Кот Базилио играют в следующую игру. Они по очереди подбрасывают две золотые монеты. Если обе монеты упадут гербами вверх, то выигрывает Кот Базилио, если одна монета упадет вверх гербом, а вторая – решкой, то выигрывает Лиса Алиса, а если обе монеты упадут решками вверх, то – ничья. Для того чтобы выяснить, справедлива ли эта игра, сыграй в нее 20 партий со своим одноклассником. Заполни таблицу:

Исход партии	Выиграла Лиса Алиса	Выиграл Кот Базилио	Ничья
Число исходов			

15. Петя решил составить таблицу, в которую он будет заносить свой возраст и возраст своего папы. Первые две строки он заполнил. Заполни остальные строки таблицы.

Возраст папы	Возраст Пети	Во сколько раз папа старше Пети
31	1	31
32	2	16
33		
35		
36		
40		
45		
60		

16. Подбросили игральный кубик. Как ты думаешь, какое событие не произойдет никогда: а) выпадет число меньше 6; б) выпадет число 4; в) выпадет число больше 6.

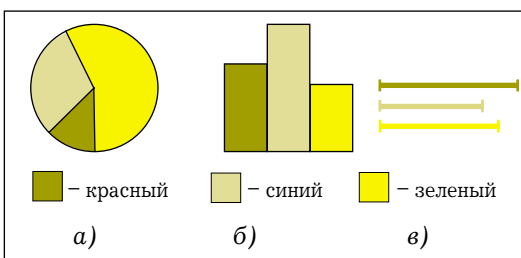
17. Подбрось монету 16 раз и заполни таблицу, в которой отметь, сколько раз

выпал герб и сколько раз выпала решка. Почему результаты твоих наблюдений не совпадают с результатами наблюдений твоих одноклассников?

Герб	
Решка	

18. Положи в мешочек из непрозрачного материала три совершенно одинаковых шарика, отличающихся только цветом: 2 белых и 1 черный. Наугад, не глядя, достань один шарик, запомни его цвет и положи обратно. Проведи этот опыт 10 раз. Сделай вывод о том, шарик какого цвета ты доставал чаще.

19. В мешочке лежат красные, синие и зеленые шарики. Диаграмма показывает их численность*. Каких шариков больше? Дай ответ в каждом случае.



20. Узнай месяц рождения всех своих одноклассников и заполни таблицу:

Месяц	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Число учащихся												

Построй линейную и столбчатую диаграммы.

21. Результаты контрольной работы, написанной двадцатью пятью учащимися класса, следующие: 3, 5, 3, 4, 4, 4, 5, 2, 3, 3, 4, 3, 5, 2, 3, 4, 5, 3, 3, 4, 4, 3, 4, 4, 5. Заполни таблицу. Найди среднюю отметку класса за контрольную работу.

Оценка	2	3	4	5
Число учащихся				

22. Четверо детей собирали белые грибы. Аня собрала 11 грибов, Борис – 14, Владимир – 10, Галина – 13. Сколько грибов в среднем собрал каждый ребенок?

23. Среднесуточная температура воздуха за четыре дня равна 18° С. В первый день было 20° С, во второй – 19° С, в третий – 22° С. Какая температура была в четвертый день?

24. Для определения количества деревьев в некотором лесном массиве обычно поступают так. Подсчитывают количество деревьев на небольшом участке и увеличивают полученное число во столько раз, во сколько площадь всего лесного массива больше площади выделенного участка. Подсчитай этим способом, сколько примерно деревьев растет на участке площадью 12 га, если на участке 50 х 50 м насчитали 52 дерева.

Литература

1. Селютин В.Д. Научные основы методической готовности учителя к обучению школьников стохастике: Монография. – Орел: ОГУ, 2002.
2. Тонких А.П. Математика: Уч. пос. для студентов ф-тов подготовки учителей нач. классов: В 2-х книгах. Кн. 1. – М.: Книжный дом «Университет», 2002.

Александр Павлович Тонких – канд. физ.-мат. наук, зав. кафедрой методики начального обучения Брянского государственного университета.

* Приносим автору и читателям свои извинения в связи с тем, что технические условия не позволяют нам воспроизвести указанные цвета. – Примеч. ред.