# Роль критериальных задач в формировании приемов эвристической деятельности у младших школьников

*О.А. Некрасова*

Творческая деятельность ученика – центральное звено обучения; включение детей в поисковую (эвристическую) деятельность – основной путь их развития. Для осуществления поисковой деятельности учащимся необходимо наличие и владение специальными приемами – эвристиками. Они представляют собой системы умственных операций, выполнение которых происходит в поиске решения текстовой задачи, выражения, неравенства и т.п. Овладение учащимися начальных классов хотя бы некоторыми обобщенными типичными эвристиками имеет существенное значение в развивающем обучении математике: они выступают и средствами осуществления учениками творческой деятельности, и показателем их умственного развития.

Средством, позволяющим контролировать сформированность у учащихся обобщенных эвристик в обучении математике, выступают **критериальные задачи**.

Критериальными называются задачи, верное решение которых свидетельствует о владении учеником проверяемым умением в обобщенном виде, т.е. выполнение критериальной задачи является объективным показателем способности ученика решать соответствующую учебную задачу. В качестве критериальной может выступать не любая математическая задача, а только та, решение которой осуществляется общим для некоторой совокупности подобных математических задач способом. Особенностью критериальных задач является их многоцелевое назначение: одна такая задача позволяет контролировать проявление нескольких умений – как специфико-математических (выполнение арифметических действий), так и общеинтеллектуальных (сравнение, аналогия). Помимо функции контроля умение решать критериальные задачи способствует формированию, актуализации и развитию других умений.

Возможность задействовать одни и те же эвристики при решении математических задач из различных тем программы позволяет решать перспективную учебную задачу по формированию обобщенных способов творческой деятельности учащихся. В связи с этим в качестве критериальных целесообразно использовать задачи на применение одного и того же эвристического приема, но на разнообразном по тематическому содержанию материале.

Рассмотрим примерные наборы критериальных заданий для контроля сформированности некоторых обобщенных эвристик, используемых в обучении младших школьников.

**I. Анализ через синтез** – один из основных приемов эвристической учебной деятельности. Сущность его состоит в том, что в процессе мышления объект включается в новые связи и потому выступает носителем новых свойств и качеств, которые фиксируются в новых понятиях. Из объекта, таким образом, как бы вычерпывается новое его содержание: он как бы поворачивается каждый раз другой своей стороной, в нем выявляются новые свойства (С.Л. Рубинштейн).

Выделяют различные проявления анализа через синтез; из формируемых в начальной школе следует отметить следующие эвристики: переформулирование, получение следствий, постановка производного задания, перекодирование информации.

**А. Переформулирование.** Суть приема – в замене условия или вопроса задачи на равносильные, т.е. такие, когда из одной формулировки логически следует другая, а из другой –

первая. Переформулирование «поворачивает» объект другой стороной, вскрывает новые его качества, что дает возможность достичь заданной цели.

**1.** Дано: $x \cdot \square = \triangle$.

– Какие из следующих высказываний верны по отношению к тому, что дано? Почему?

а) Это уравнение;

б) числовое равенство;

в) произведение числа $\square$ и переменной $x$ равно числу $\triangle$;

г) буквенное выражение;

д) $\triangle$ – результат умножения неизвестного числа $x$ на число $\square$;

е) первый множитель – $x$, второй – $\square$, произведение равно $\triangle$.

*Ответ:* а), в), д), е).

**2.** Не вычисляя, проверь, верно ли равенство 57301 : 448 = 123.

*Ответ:* чтобы это проверить, необходимо следующее переформулирование: «Будет ли верным равенство 448 · 123 = 57301?», основанное на знании взаимосвязи компонентов и результатов действий умножения и деления. Благодаря переформулированию выясняем, что равенство 448 · 123 = 57301 является неверным, так как произведение 3 · 8 = 24, а в числе 57301 последняя цифра – не 4, а 1.

**3.** Все ли из данных высказываний являются верными? Найди среди них такие, что обозначают одно и то же:

а) число 3 является делителем для 66;

б) все дети любят мороженое;

в) если 27 разделить на 9, то будет 3;

г) 3 – наименьший делитель 66;

д) есть дети, которые любят мороженое;

е) 66 кратно 3;

ж) частное 27 и 9 равно 3;

з) нет ни одного ребенка, который не любил бы мороженое.

*Ответ:* г) – неверное высказывание, так как наименьший делитель 66 – число 1. Являются тождественными высказывания а)–е), б)–з), в)–ж). Высказывания г) и д) не имеют себе тождественных.

**4.** Как по-другому сформулировать условие задачи:

1) Сколько потребуется полосок цветной бумаги длиной по 5 см каждая, чтобы обклеить по контуру открытку прямоугольной формы, если длина открытки 15 см, а ширина 20 см?

*Ответ:* периметр открытки прямоугольной формы 70 см. Сколько полосок цветной бумаги по 5 см каждая потребуется для оклейки открытки по контуру?

2) В коробке было 27 фломастеров, а карандашей на 9 больше. Сколько всего фломастеров и карандашей было в коробке?

*Ответ:* в коробке было 27 фломастеров, а разность между числом фломастеров и карандашей равна 9. Сколько всего фломастеров и карандашей было в коробке?

**5.** Сколько существует прямоугольников, площадь которых равна 24 см$^2$ (32 см$^2$, 54 см$^2$)?

*Ответ:* поскольку площадь прямоугольника равна произведению его длины на ширину, то вопрос задачи переформулируем так: сколько существует пар чисел, произведение которых равно 24 (32, 54) ?

Решение предложенных задач служит критерием сформированности у учащихся приема переформулирования, а также способствует развитию умения рассуждать, проявлению других эвристик: получению следствий, использованию аналогии. Эти задачи являются и средством контроля за сформированностью разнообразных алгебраических, арифметических и геометрических понятий, без знания которых невозможно верное использование приема переформулирования и решение задач.

**Б. Прием получения следствий** из того, что дано, состоит в выявлении непосредственно не данного в объекте, т.е. скрытого в нем, путем рассуждений, получения выводов, основанных на имеющихся у решающего знаниях.

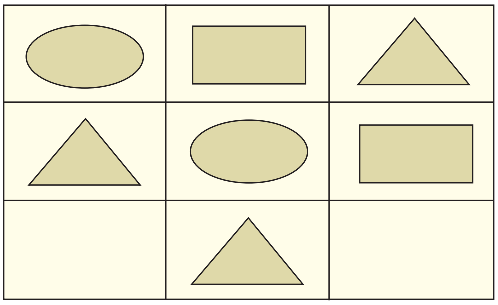
**1.** Восстановите цифры, спрятанные в квадратиках:

а) $\square\square + 1 = \square\square\square$;

б) $\square\square + 2 = \square\square\square$.

*Ответ:* а) к двузначному числу прибавили единицу и получили трехзначное число. Значит, дано наибольшее двузначное число, т.е. 99. Тогда 99 + 1 = 100; б) 98 + 2 = 100; 99 + 2 = 101.

**2.** Назови недостающие фигуры. Объясни свой выбор.



*Ответ:* проанализировав данное, получаем вывод: каждая из трех фигур не может повторяться в строке или столбце более одного раза, т.е. соседние фигуры не должны быть одинаковыми. В соответствии с этим получаем, что в левой нижней клетке недостающая фигура – , а в нижней правой – .

**3.** Прочитай текст:

**У Пети и Лиды было денег поровну. Когда Петя уплатил за свою покупку 28 руб., у него осталось 14 руб. У Лиды после покупки осталось только 9 руб.**

– Соедини с помощью стрелок выражение и вопрос так, чтобы значение выражения являлось ответом на этот вопрос.

*Ответ:*

(28 + 14) 2

((28 + 14) – 9) + 9

(28 + (14 – 9)) + 9

28 + 14

(28 + 14) + (28 + (14 – 9) + 9)

14 – 9

28 + (14 – 9)

(28 + 14) – 9

28 + (28 + (14 – 9))

28 + ((28 + 14) – 9)

(28 + 14) + ((28 + 14) – 9) + 9)

14 + 9

(28 + (14 – 9)) – 28

((28 + 14) – 9) – 28

Сколько было денег у Пети?

Сколько было денег у Лиды?

Сколько всего было денег у детей?

Сколько денег потратила Лида?

Сколько всего денег потратили дети?

На сколько рублей Лида потратила больше, чем Петя?

На сколько рублей у Пети осталось больше, чем у Лиды?

Сколько всего денег осталось у детей?

**4.** У Коли 7 марок, а у Вити вдвое больше. Сколько марок у Саши, если всего у ребят 25 марок?

– Какие из выражений, записанных ниже, являются решениями этой задачи?

а) ♥ – ◊ · 2;
б) □ – (△+△ · 2);
в) □ – (△+△ + 2);
г) △+ 2 · △;
д) 25 – 7 · 3;
е) ( 25 – 7 ) – 2 · 7;
ж) ( ♥ – 2 · ◊ ) – ?

*Ответ:* б), д), е), ж).

При выполнении данных заданий эвристика «получение следствий» актуализирует проявление и закрепление приемов переформулирования, постановки производного задания, умений рассуждать.

**В. Постановка производного задания.** При использовании этого приема от учащихся требуется, ориентируясь на условие и вопрос задания, составить новые задания-вопросы, т.е. сформулировать производные задания, выполнение которых позволяет достичь цели.

**1.** Даны числа 12, 3, 36. Какие вопросы можно поставить относительно этих чисел?

*Ответ:* какие числовые равенства можно составить из этих чисел? Какое из чисел наибольшее? Наименьшее? На сколько 3 меньше 12? Во сколько раз? Кратно ли 36 числу 12? И т.д.

**2.** Из двух городов, находящихся на расстоянии 520 км, одновременно вышли навстречу друг другу два поезда и встретились через 4 ч. Один поезд шел со скоростью 60 км в час.

– Поставь вопрос к данному условию (тексту). Какие еще вопросы можно задать? Какие простые задачи можно составить по этим данным?

**3.** Выражения 60 · 4; 520 : 4; (520 : 4) – – 60 составлены на основе текста задания 1. Поставь вопрос так, чтобы решение полученной задачи можно было записать первым выражением (60 · 4); вторым; третьим.

*Ответ:* 1) Какое расстояние до встречи прошел один поезд? (60 · 4.) 2) Какова общая скорость первого и второго поездов или сколько км/ч проходили оба поезда? (520 : 4.) 3) Какова скорость второго поезда? ((520 : 4) – 60).

**4.** 1) Рабочие копали канаву 3 дня. Какие данные необходимы для определения длины канавы?

2) Требуется найти скорость некоторого предмета. Что предварительно следует узнать?

*Ответ:* 1) для этого необходимо узнать, сколько они выкапывали за каждый день. 2) Пройденный путь и время движения предмета.

Об овладении данной эвристикой свидетельствует умение увидеть проблему и получить следствие-вывод.

**Г. Перекодирование информации.** Суть данного приема – в оперировании различными видами моделей: схематизированных и знаковых. Например, умение переводить словесную формулировку задачи на язык схемы, чертежа или рисунка; заменять символическую нецифровую модель словесной или цифровой; изображать процесс решения задачи в виде модели «дерева рассуждений» или наоборот – восстанавливать текст задачи по данному «дереву» и т.п.

Приведем примеры критериальных задач на использование данного интеллектуального умения.

**1.** Из предложенных моделей выбери те, что обозначают распределительный закон умножения относительно сложения:

а) (□ +△) · ◊;
б) ⊔ · ◊ +△;
в) (◊ + ⊔):△;
г) □ · ◊ +△· ◊;
д) △ – ◊;
е) ◊ : ⊔ +△· Y;
ж) ⊔ · (◊ +△) – (◊ +△);
з) □ · ◊ : △ + ◊.

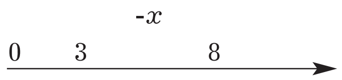
*Ответ:* а) и г).

**2.** 1) По данной схеме составь уравнение и реши его: □ – $x$ =△;

2) составленное уравнение изобрази на числовом луче;

3) по схеме придумай текстовую задачу.

*Ответ:* 1) $x = \square - \triangle$ ; $8 - x = 3$, $x = 8 - 3$, $x = 5$;

2) 


3) В коробке было 8 карандашей. После того как оттуда взяли несколько штук, в коробке стало 3 карандаша. Сколько карандашей взяли из коробки?

**3.** На одной полке – △ книг, а на второй – на Y книг больше. Сколько книг на второй полке?

– Из следующих моделей задач выбери задачи, обратные к данной, если ответ к ней обозначен числом □:

а) I – △
II – ?

б) I – △
II – □ на ? больше

в) I – ?
II –

г) I – ?
II – □, на Y больше

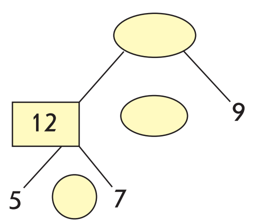
д) I – △
II – □ ?

*Ответ:* задачи б) и г) – обратные данной (модель которой: I – △, II – ? на Y больше), так как в них вместо одного из данных чисел исходной задачи стоит знак вопроса, а вместо искомого – ее ответ.

**4.** 1) Незнайка задумал число, но забыл его. Он помнит только, что оно состоит из двух чисел, одно из которых – 9, а другое он тоже забыл, но, подумав, вспомнил, что это другое число состоит из 5 и 7. Незнайка просит помочь ему восстановить забытое число.

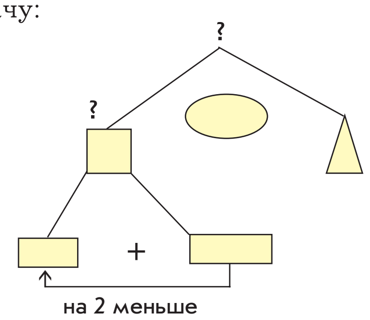
– Изобрази эту задачу в виде схемы «дерево рассуждений» и найди ответ.

*Ответ:*




1) $5 + 7 = 12$;
2) $12 + 9 = 21$ – задуманное число.

2) По данному «дереву» составь задачу:



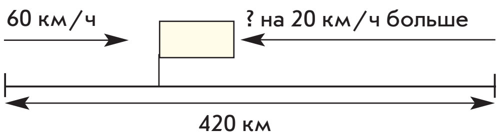

*Ответ:* У Лены было 12 воздушных шаров одного цвета, а у Кати были шары синие и красные, причем красных было 11. Это на 2 шара больше, чем синих. На сколько у Кати шаров было больше, чем у Лены?

Перекодирование – еще один из видов проявления анализа через синтез. Важность формирования этого эвристического приема в том, что он служит опорой для учащихся в переходе от наглядно-образного к абстрактно-логическому мышлению. О сформированности данного интеллектуального умения свидетельствует «перевод» информации с одного «языка» на другой (со словесного на цифровой), с другого (цифрового) на третий («язык отрезков», например). Перекодирование служит использованию и формированию других эвристик: получению следствий, переформулированию и др.

**II. Аналогия** – способ рассуждения, характеризующийся, как известно, тем, что из сходства двух объектов по нескольким признакам и при наличии у одного из них дополнительного признака делается вывод о наличии такого же признака и у другого объекта.

Аналогия основана на сравнении, в котором акцент смещается на выявление **сходства**: новый объект сравнивается с известным, фиксируются общие признаки, отмечается наличие некоторого признака у первого объекта и делается предположение о наличии такого же признака у другого объекта.

**1.** Реши задачу (см. рисунок):




– Составь задачу, которая бы решалась подобно этой.

**2.** 1) Из 5 равных палочек построй два треугольника.

*Ответ:* для построения двух отдельных треугольников требуется 6 палочек, а дано только 5; значит, необходимо построить два треугольника, у которых одна сторона – общая: .

2) Ориентируясь на выполненное выше задание, реши задачу:

Можно ли с помощью 7 одинаковых по длине деревянных досок построить 2 равных по величине детских песочницы квадратной формы? Поясни свой ответ с помощью рисунка.

*Ответ:* так как песочницы имеют форму квадрата и для их постройки требуется 8 досок (по 4 для каждой), то в условии не хватает одной доски. Похожий случай мы уже рассматривали, значит, и здесь следует поступить так же: сделать одну доску общей стороной для обеих песочниц: .

**3.** 1) Из 5 «единиц» и знака действия составь выражение, значение которого равно 100.

*Ответ:* $111 - 11 = 100$.

2) Из 5 «двоек» и знака действия составь выражение, значение которого равно 200.

*Ответ:* по аналогии с предыдущим получаем: $222 - 22 = 200$.

– Составь и реши похожие задачи.

**4.** Из предложенных выражений найди такие, которые имеют одинаковые способы вычисления:

| | |
|---|---|
| а) $8 + 6$; | е) $36 - 19$; |
| б) $38 + 15$; | ж) $10 + 3$; |
| в) $45 : 9$; | з) $6 + 1$; |
| г) $4 + 7$; | и) $5 \cdot 3$. |
| д) $9 - 5$; | |

*Ответ:* а), г) – сложение однозначных чисел с переходом через десяток.

**5.** В бассейне по соседним дорожкам длиной 100 м навстречу друг другу поплыли две девочки. Одна из них за 1 минуту проплыла 30 м, а другая – 20 м. Какое расстояние осталось между девочками через минуту?

– Какие из следующих задач имеют сходные с данной решения?

а) Два мальчика одновременно побежали навстречу друг другу по дорожке длиной 100 м и встретились через 10 секунд. Сколько метров в секунду пробегал один мальчик, если скорость другого 4 м/сек?

б) Из двух поселков одновременно вышли навстречу друг другу два пешехода и встретились через 6 ч. Какое расстояние между поселками, если скорость первого пешехода 5 км/ч, а второго – 4 км/ч?

в) Из разных пунктов, расстояние между которыми 40 км, одновременно выехали навстречу друг другу два велосипедиста. Один проехал за час 12 км, а другой – 15 км. Какое расстояние будет между ними через час?

*Ответ:* в), так как, сравнивая тексты задач, мы видим, что предметы движутся навстречу друг другу, движение начинается одновременно, даются расстояния, пройденные за единицы времени, и требуется определить оставшееся расстояние между движущимися предметами. Обе задачи имеют сходные логические основы условий (понятия и отношения между ними, заданные в условии задачи и определяющие содержание вычислительного процесса для получения ответа к ней), т.е. отношение между общим расстоянием и расстоянием, пройденным двумя объектами за определенное время, а значит, и сходные решения.

Исходя из вышеизложенного сделаем выводы:

1. Использование учителем критериальных задач в обучении может выступать как в качестве основного пути корректной диагностики уровня сформированности эвристических (и других) умений у учащихся, так и являться одной из форм самоконтроля.

2. Помимо функции контроля критериальные задачи представленного типа позволяют формировать и разви-

вать многие другие умения (как математические – способы вычислений, решение уравнений и текстовых задач, так и общеинтеллектуальные – сравнение, моделирование, использование слов-кванторов и др.).

3. Использование критериальных задач, разнообразных по тематике, содержащих арифметический, алгебраический и геометрический материал, способствует формированию обобщенных приемов осуществления творческой деятельности в обучении математике.

4. Выполнение учениками критериальных задач с использованием схем-моделей, занимательных по сюжету, т.е. нестандартных по внешнему представлению и способам выполнения, преодоление трудностей в процессе решения – все это способствует формированию у учащихся познавательных мотивов, повышению творческой активности и, следовательно, созданию положительной мотивации к изучению математики в целом.

**Литература**

1. *Артемов А.К.* Обучение математике в первом (втором, третьем) классе. Программы развивающего обучения: Пос. для учителей. – Пенза: НМЦ отдела образования Пензенской гор. администрации, 1995 (1996, 1998).

2. *Артемов А.К., Тихонова Н.Б.* Основы методического мастерства учителя в обучении математике младших школьников: Пос. для учителей и студентов ф-та «Педагогика и методика начального образования». – Самара: СГПУ, 1999.

3. *Зубова С.П.* Использование задач для выявления сформированности обобщений // Начальная школа. 1993. № 5.

***Ольга Александровна Некрасова*** – *учитель средней школы № 77, г. Пенза.*